Предварительные сведения теории разностных схем

1 Формулы суммирования по частям и разностные формулы Грина

Получим ряд соотношений, которые в дальнейшем будем использовать при исследовании свойств разностных схем в различных сеточных гильбертовых пространствах. Пока ограничимся одномерным случаем. Пусть u и v — сеточные функции, заданные на равномерной сетке $\overline{\omega_h} = \{x_k = hk,\ \ k = 0, 1, ..., k_0,\ \ hk_0 = l\}$ на отрезке $[0, l]$. Для этих функций можно ввести скалярные произведения различным образом, например:

$$(u, v) = \sum_{k=1}^{k_0-1} u_k v_k h; \quad (u, v] = \sum_{k=1}^{k_0} u_k v_k h; \quad [u, v) = \sum_{k=0}^{k_0-1} u_k v_k h.$$

Прежде всего, получим аналог формул интегрирования по частям для разностных функций — формулы суммирования по частям. Для этого рассмотрим формулы разностного дифференцирования произведения двух сеточных функций. Будем использовать обозначение $u_{\bar{x},k}$ для левой односторонней производной функции u в узле с номером k. Тогда:

$$(uv)_{\bar{x},k} = \frac{1}{h_k}(u_k v_k - u_{k-1} v_{k-1}) = \frac{1}{h_k}(u_k v_k - u_{k-1} v_{k-1} + u_{k-1} v_k - u_{k-1} v_k) =$$
$$= u_{\bar{x},k} v_k + u_{k-1} v_{\bar{x},k} = u_{\bar{x},k} v_{k-1} + u_k v_{\bar{x},k} = u_{\bar{x},k} v_k + u_k v_{\bar{x},k} - h_k u_{\bar{x},k} v_{\bar{x},k},$$

где $h_k = x_k - x_{k-1}$. Аналогично получаем:

$$(uv)_{x,k} = u_{x,k} v_k + u_{k+1} v_{x,k} = u_{x,k} v_{k+1} + u_k v_{x,k} = u_{x,k} v_k + u_k v_{x,k} + h_{k+1} u_{x,k} v_{x,k}$$

где $h_{k+1} = x_{k+1} - x_k$.

Воспользуемся полученными формулами и рассмотрим выражение:

$$u_k v_{x,k} = (uv)_{x,k} - u_{x,k} v_{k+1} = (uv)_{x,k} - u_{\bar{x},k+1} v_{k+1}.$$

Следовательно,

$$(u, v_x) = \sum_{k=1}^{k_0-1} u_k v_{x,k} h_{k+1} = \sum_{k=1}^{k_0-1} (uv)_{x,k} h_{k+1} - \sum_{k=1}^{k_0-1} u_{\bar{x},k+1} v_{k+1} h_{k+1},$$

$$\sum_{k=1}^{k_0-1}(uv)_{x,k}h_{k+1} = (u_{k_0}v_{k_0} - u_{k_0-1}v_{k_0-1}) + (u_{k_0-1}v_{k_0-1} - u_{k_0-2}v_{k_0-2}) + ... + (u_2v_2 - u_1v_1) =$$

$$= u_{k_0}v_{k_0} - u_1v_1,$$

$$\sum_{k=1}^{k_0-1} u_{\bar{x},k+1}v_{k+1}h_{k+1} = \{k' = k+1\} = \sum_{k'=2}^{k_0} u_{\bar{x},k'}v_{k'}h_{k'} = \sum_{k'=1}^{k_0} u_{\bar{x},k'}v_{k'}h_{k'} - u_{\bar{x},1}v_1h_1 =$$

$$= (u_{\bar{x}}, v] - u_1v_1 + u_0v_1,$$

откуда получаем формулу суммирования по частям:

$$(u, v_x) = u_{k_0}v_{k_0} - u_0v_1 - (u_{\bar{x}}, v]. \tag{1.1}$$

Аналогично может быть получено равенство:

$$(u, v_{\bar{x}}) = u_{k_0}v_{k_0-1} - u_0v_0 - [u_x, v). \tag{1.2}$$

Первая формула Грина.

Пусть a — произвольная ограниченная сеточная функция, заданная на $\overline{\omega_h}$. Воспользуемся равенством (1.1), в котором заменим v на $av_{\bar{x}}$:

$$(u, (av_{\bar{x}})_x) = a_{k_0}u_{k_0}v_{\bar{x},k_0} - a_1u_0v_{\bar{x},1} - (au_{\bar{x}}, v_{\bar{x}}]\,. \tag{1.3}$$

Равенство (1.3) называется первой формулой Грина.

Вторая формула Грина.

Вторую формулу Грана получим из первой, меняя в ней u и v ролями и вычитая из (1.3) получающееся при этом равенство:

$$(u, (av_{\bar{x}})_x) - ((au_{\bar{x}})_x, v) = a_{k_0}\left(u_{k_0}v_{\bar{x},k_0} - v_{k_0}u_{\bar{x},k_0}\right) - a_1\left(u_0v_{\bar{x},1} - v_0u_{\bar{x},1}\right). \tag{1.4}$$

2 Разностные уравнения порядка m

Пусть $y_k = y(k)$ — функция целочисленного аргумента $k = 0, \pm1, \pm2, ...$ Введем обозначения:

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k, \quad \nabla y_k = y_k - y_{k-1}.$$

Справедливы следующие равенства:

$$\Delta y_{k-1} = \nabla y_k, \quad \Delta^2 y_k = \Delta(\Delta y_k) = \Delta(y_{k+1} - y_k) = (y_{k+2} - y_{k+1}) - (y_{k+1} - y_k) = y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k,$$

$$\Delta\nabla y_k = \Delta^2 y_{k-1} = y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}, \quad \Delta^m y_k = \Delta\left(\Delta^{m-1}y_k\right).$$

Определение 2.1 *Уравнение*

$$\alpha_k^{(0)}\Delta^m y_k + \alpha_k^{(1)}\Delta^{(m-1)} y_k + ... + \alpha_k^{(m-1)}\Delta y_k + \alpha_k^{(m)} y_k = f_k, \tag{2.1}$$

где $\alpha_k^{(p)}$, $p = 0, 1, ..., m$ *и* f_k *— заданные функции целочисленного аргумента* k*, называется разностным уравнением* m*-го порядка относительно неизвестной функции* y_k *целочисленного аргумента* k.

2.1 Разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим однородное разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$A\Delta^2 y_{k-1} + B\Delta y_{k-1} + C y_{k-1} = 0,$$

где A, B, C — некоторые константы. Его можно переписать в виде:

$$A(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}) + B(y_k - y_{k-1}) + C y_{k-1} = 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; A y_{k+1} - (2A - B) y_k + (C + A - B) y_{k-1} = 0,$$

или же

$$a y_{k-1} - c y_k + b y_{k+1} = 0, \tag{2.2}$$

где a, b, c — константы.

Решение однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$Au'' + Bu' + Cu = 0$$

ищется в виде $u = e^{\alpha x}$. По аналогии решение разностного уравнения (2.2) будем искать в виде:

$$y_k = q^k, \quad q \neq 0.$$

Тогда

$$bq^2 - cq + a = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{D}}{2b}, \quad D = c^2 - 4ab.$$

1) Если $D > 0$, то q_1 и q_2 вещественны и различны. Пусть $y_k^{(1)} = q_1^k$ и $y_k^{(2)} = q_2^k$.

Известно, что две непрерывно-дифференцируемые функции u_1 и u_2 непрерывно меняющегося аргумента линейно независимы тогда и только тогда, когда их определитель Вронского

$$W[u_1, u_2] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Можно доказать, что две функции $v_k^{(1)}$ и $v_k^{(2)}$ целочисленного аргумента k независимы тогда и только тогда, когда отличен от нуля разностный аналог определителя Вронского:

$$\Delta_{k,k+1}[v_k^{(1)}, v_k^{(2)}] = \begin{vmatrix} v_k^1 & v_k^2 \\ \Delta v_k^1 & \Delta v_k^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_k^1 & v_k^2 \\ v_{k+1}^1 & v_{k+1}^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} v_k^1 & v_k^2 \\ v_k^1 & v_k^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_k^1 & v_k^2 \\ v_{k+1}^1 & v_{k+1}^2 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что

$$\Delta_{k,k+1}[y_k^{(1)}, y_k^{(2)}] = \begin{vmatrix} q_1^k & q_2^k \\ q_1^{k+1} & q_2^{k+1} \end{vmatrix} = (q_2 - q_1)q_1^k q_2^k \neq 0.$$

Следовательно, функции $y_k^{(1)}$ и $y_k^{(2)}$ линейно независимы, и общее решение уравнения (2.2) может быть записано в виде:

$$y_k = C_1 q_1^k + C_2 q_2^k,$$

где C_1 и C_2 — произвольные константы.

2) Если $D = 0$, то $q_1 = q_2 = \dfrac{c}{2b} = q_0$. Пусть $y_k^{(1)} = q_0^k$. Покажем, что в этом случае, по аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями, функция $y_k^{(2)} = k \cdot q_0^k$ удовлетворяет уравнению (2.2):

$$ay_{k-1}^{(2)} - cy_k^{(2)} + by_{k+1}^{(2)} = a(k-1)q_0^{k-1} - ckq_0^k + b(k+1)q_0^{k+1} = q_0^{k-1}(a(k-1) - ck\underbrace{q_0}_{=\frac{c}{2b}} + b(k+1)\underbrace{q_0^2}_{=\frac{c^2}{4b^2}}) =$$

$$= q_0^{k-1} \cdot \frac{(k-1)(4ab - c^2)}{4b} = -q_0^{k-1} \cdot \frac{(k-1)D}{4b} = 0.$$

Так как

$$\Delta_{k,k+1}[y_k^{(1)}, y_k^{(2)}] = \begin{vmatrix} q_0^k & kq_0^k \\ q_0^{k+1} & (k+1)q_0^{k+1} \end{vmatrix} = q_0^{2k+1} \neq 0,$$

то $y_k^{(1)}$ и $y_k^{(2)}$ линейно-независимы, и общее решение уравнения (2.2) имеет вид:

$$y_k = (C_1 + C_2 k)\, q_0^k,$$

где C_1 и C_2 — произвольные константы.

3) Если $D < 0$, то q_1 и q_2 комплексно сопряжены: $q_{1,2} = \dfrac{c \pm i\sqrt{|D|}}{2b} = \rho \cdot e^{\pm i\varphi}$, где

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{|D|}}{c}, \quad \rho = \frac{\sqrt{c^2 + |D|}}{2b} = \frac{\sqrt{c^2 + 4ab - c^2}}{2b} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Так как

$$q_1^k = \rho^k e^{ik\varphi} = \rho^k(\cos k\varphi + i \sin k\varphi),$$

$$q_2^k = \rho^k e^{-ik\varphi} = \rho^k(\cos k\varphi - i\sin k\varphi),$$

то положим $y_k^{(1)} = \rho^k \cos k\varphi$ и $y_k^{(2)} = \rho^k \sin k\varphi$. Покажем, что эти функции линейно независимы:

$$\Delta_{k,k+1}[y_k^{(1)}, y_k^{(2)}] = \begin{vmatrix} \rho^k \cos k\varphi & \rho^k \sin k\varphi \\ \rho^{k+1}\cos(k+1)\varphi & \rho^{k+1}\sin(k+1)\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \rho^{2k+1}\left(\sin(k+1)\varphi\cos k\varphi - \sin k\varphi\cos(k+1)\varphi\right) = \rho^{2k+1}\sin\varphi = \rho^{2k+1}\frac{\sqrt{|D|}}{2\sqrt{ab}} \neq 0.$$

Следовательно, общее решение уравнения (2.2) может быть записано в виде

$$y_k = \rho^k(C_1\cos k\varphi + C_2 \sin k\varphi),$$

где C_1 и C_2 — произвольные константы.

3 Разностная задача Штурма-Лиувилля на отрезке

Для дальнейшего рассмотрения нам понадобится разностный аналог полной ортогональной системы функций на отрезке. Как известно, такой системой является система собственных функций задачи Штурма-Лиувилля на отрезке. В данном разделе мы рассмотрим ее разностный аналог.

Как известно, задача

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda u(x) = 0, \quad x \in (0, l), \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

имеет бесконечно много собственных значений $\lambda_n = \left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2$, $n = 1, 2, ...$, каждому из которых соответствует нормированная собственная функция вида $u^{(n)}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin\dfrac{\pi n x}{l}$.

Рассмотрим разностный аналог задачи (3.1). Введем на отрезке $[0, l]$ равномерную сетку с шагом h: $\overline{\omega_h} = \{x_k = k\cdot h;\ k = 0, 1, 2, ..., k_0;\ \ k_0\cdot h = l\}$. Разностная аппроксимация задачи (3.1) имеет вид:

$$\begin{cases} y_{\bar{x}x} + \lambda y = 0, \quad k = 1, 2, ..., k_0 - 1, \\ y_0 = y_{k_0} = 0, \end{cases}$$

или, что то же самое:

$$\begin{cases} y_{k+1} - 2\left(1 - \dfrac{h^2\lambda}{2}\right)y_k + y_{k-1} = 0, \quad k = 1, 2, ..., k_0 - 1, \\ y_0 = y_{k_0} = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Решение однородного дифференциального уравнения (3.1) с постоянными коэффициентами ищется в виде $u(x) = e^{\alpha x}$. По аналогии будем искать решение однородного разностного уравнения (3.2) в виде $y_k = q^k$, где $q \neq 0$. Подставляя это выражение в уравнение (3.2), получаем:

$$q^{k+1} - 2\left(1 - \frac{h^2\lambda}{2}\right) q^k + q^{k-1} = 0;\ k = 1, 2, ..., k_0 - 1 \ \Rightarrow\ q^2 - 2\left(1 - \frac{h^2\lambda}{2}\right) q + 1 = 0.$$

Так как

$$\frac{D}{4} = \left(1 - \frac{h^2\lambda}{2}\right)^2 - 1,$$

то необходимо рассмотреть отдельно три случая: $D > 0$, $D = 0$ и $D < 0$.

1) $D > 0$, или, что то же самое,

$$\left|1 - \frac{h^2\lambda}{2}\right| > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 1 - \dfrac{h^2\lambda}{2} > 1, \\ 1 - \dfrac{h^2\lambda}{2} < -1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{h^2\lambda}{2} < 0, \\ \dfrac{h^2\lambda}{2} > 2. \end{array}\right.$$

В этом случае

$$y_k = C_1 q_1^k + C_2 q_2^k,$$

где q_1 и q_2 вещественны и различны. Подставим функцию y_k в граничные условия и рассмотрим определитель соответствующей системы относительно неизвестных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = y_0 = 0, \\ C_1 q_1^{k_0} + C_2 q_2^{k_0} = y_{k_0} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ q_1^{k_0} & q_2^{k_0} \end{vmatrix} = q_2^{k_0} - q_1^{k_0} \neq 0.$$

Следовательно, $C_1 = C_2 = 0$ и $y_k \equiv 0$, то есть не является собственной функцией по определению.

2) $D = 0$, или, что то же самое,

$$\left[\begin{array}{l} \lambda = 0, \\ \dfrac{h^2\lambda}{2} = 2. \end{array}\right.$$

В этом случае $y_k = (C_1 + kC_2)q_0^k$. Подставляя эту функцию в граничные условия, получаем:

$$\begin{cases} y_0 = C_1 = 0, \\ y_{k_0} = (C_1 + k_0 C_2) q_0^{k_0} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0, \end{cases}$$

то есть $y_k \equiv 0$.

3) $D < 0$, то есть $0 < \dfrac{h^2\lambda}{2} < 2$. В этом случае можно ввести обозначение

$$\cos(\alpha h) = 1 - \frac{h^2\lambda}{2}$$

и найти $q_{1,2}$ в виде:

$$q_{1,2} = \cos(\alpha h) \pm \sqrt{\cos^2(\alpha h) - 1} = \cos(\alpha h) \pm i\sin(\alpha h) = e^{\pm i\alpha h},$$

откуда получаем:

$$y_k^{(1)} = e^{i\alpha hk} = e^{i\alpha x_k}, \quad y_k^{(2)} = e^{-i\alpha hk} = e^{-i\alpha x_k}.$$

Так как $y_k^{(1)}$ и $y_k^{(2)}$ линейно независимы, то общее решение уравнения (3.2) можно записать в виде:

$$y_k = \tilde{C}_1 y_k^{(1)} + \tilde{C}_2 y_k^{(2)} = C_1\sin(\alpha x_k) + C_2\cos(\alpha x_k).$$

Из условия $y_0 = 0$ получаем $C_2 = 0$, то есть $y_k = C_1\sin(\alpha x_k)$. Воспользуемся вторым граничным условием:

$$y_{k_0} = C_1\sin(\alpha x_{k_0}) = C_1\sin(\alpha l) = 0 \;\Rightarrow\; \alpha l = \pi n \;\Rightarrow\; \alpha_n = \frac{\pi n}{l},\; n = 1, 2, ...$$

Следовательно, для собственных значений λ_n задачи (3.2) получаем выражение:

$$\cos\frac{\pi nh}{l} = 1 - \frac{h^2\lambda_n}{2} \;\Rightarrow\; \lambda_n = \frac{2}{h^2}\left(1 - \cos\frac{\pi nh}{l}\right) = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi nh}{2l},\; n = 1, 2, ... \tag{3.3}$$

Соответствующие собственные функции имеют вид:

$$y_k^{(n)} = C_1\sin\frac{\pi n x_k}{l}.$$

Заметим, что при $n = k_0$

$$y_k^{(k_0)} = C_1\sin\frac{\pi k_0 x_k}{l} = C_1\sin\frac{\pi k_0 hk}{l} = C_1\sin\frac{\pi lk}{l} = C_1\sin(\pi k) = 0.$$

Заметим также, что при $n = k_0 + 1$ и при $n = k_0 - 1$ собственные значения (3.3) совпадают:

$$\lambda_{k_0+1} = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\pi h}{2l} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{h^2}\cos^2\frac{\pi h}{2l},$$

$$\lambda_{k_0-1} = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(-\frac{\pi h}{2l} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{h^2}\cos^2\frac{\pi h}{2l}.$$

Аналогично можно показать, что $\lambda_{k_0+n} = \lambda_{k_0-n}$, то есть λ_n принимает различные значения, которым соответствуют нетривиальные собственные функции, при $n = 1, 2, ..., k_0 - 1$.

Основные свойства собственных функций и собственных значений.

1) Справедливы неравенства:

$$0 < \frac{8}{l^2} \leqslant \lambda_1 = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2l} < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{k_0-1} = \frac{4}{h^2}\cos^2\frac{\pi h}{2l} < \frac{4}{h^2}.$$

В самом деле,

$$\lambda_1 = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2l} = \frac{\pi^2}{l^2}\left[\frac{\sin(\pi h/2l)}{\pi h/2l}\right]^2.$$

Так как $h \leqslant \dfrac{l}{2}$, то $\dfrac{\pi h}{2l} \leqslant \dfrac{\pi}{4}$. Поскольку

$$\min_{z\in[0,\pi/4]}\left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 = \left.\left(\frac{\sin z}{z}\right)^2\right|_{z=\pi/4} = \frac{8}{\pi^2},$$

окончательно получаем $\lambda_1 \geqslant \dfrac{8}{l^2}$.

2) Собственные функции ортогональны между собой:

$$\left(y^{(n)}, y^{(m)}\right) = 0 \quad \text{при } n \neq m. \tag{3.4}$$

В самом деле, пользуясь формулой Грина

$$(u, (av_{\bar{x}})_x) - (v, (au_{\bar{x}})_x) = a_{k_0}\left(uv_{\bar{x}} - u_{\bar{x}}v\right)_{k_0} - a_1\left(uv_x - u_x v\right)_0,$$

в которой положим $a_k \equiv 1$, $u = y^{(n)}$, $v = y^{(m)}$, и учитывая граничные условия для $y^{(n)}$ и $y^{(m)}$, получаем:

$$0 = \left(y^{(n)}, y^{(m)}_{\bar{x}x}\right) - \left(y^{(n)}_{\bar{x}x}, y^{(m)}\right) = (\lambda_n - \lambda_m)\left(y^{(n)}, y^{(m)}\right),$$

откуда, в силу того что $\lambda_m \neq \lambda_n$ при $m \neq n$ получаем (3.4).

3) Если положить $C_1 = \sqrt{\dfrac{2}{l}}$, то $\|y^{(n)}\| = 1$. В самом деле, при $C_1 = \sqrt{\dfrac{2}{l}}$:

$$\|y^{(n)}\|^2 = \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{k_0-1}\left(y^{(n)}_k\right)^2 h = \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{k_0-1} h\sin^2\frac{\pi n x_k}{l} = \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{h}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi n x_k}{l}\right) =$$

$$= \frac{h}{l}(k_0 - 1) - \frac{h}{l}\sum_{k=1}^{k_0-1}\mathrm{Re}(\underbrace{e^{i2\pi nh/l}}_{z_n})^k = \frac{hk_0 - h}{l} - \frac{h}{l}\mathrm{Re}\frac{z_n^{k_0} - z_n}{z_n - 1}.$$

Учитывая, что $hk_0 = l$ и $z_n^{k_0} = e^{i2\pi nhk_0/l} = e^{i2\pi n} = 1$, окончательно получаем:

$$\|y^{(n)}\|^2 = 1 - \frac{h}{l} - \frac{h}{l}\cdot\frac{1 - z_n}{z_n - 1} = 1.$$

4) Для любой функции $f(x_k)$, $x_k \in \overline{\omega_h}$, ограниченной по норме и обращающейся в 0 при $k = 0$ и $k = k_0$, справедливо равенство:

$$f(x_k) = \sum_{n=1}^{k_0-1} f_n \cdot \mu^{(n)}(x_k), \tag{3.5}$$

где $\mu^{(n)}(x_k)$ — нормированные собственные функции задачи (3.2):

$$\mu^{(n)}(x_k) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n x_k}{l},$$

а коэффициенты f_n определяются как коэффициенты Фурье:

$$f_n = \left(f, \mu^{(n)}\right).$$

При этом

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{k_0-1} f_n^2. \tag{3.6}$$

Доказательство. Рассмотрим равенство (3.5) как СЛАУ относительно неизвестных коэффициентов $f_1, ..., f_{k_0-1}$. Умножая его скалярно на $\mu^{(n)}(x_k)$ для $n = 1, 2, ..., k_0 - 1$ и пользуясь тем, что

$$\left(\mu^{(n)}, \mu^{(m)}\right) = \delta_{n,m},$$

получаем, что $f_n = \left(f, \mu^{(n)}\right)$.

Рассмотрим теперь квадрат нормы f. Так как по условию $f_0 = f_{k_0} = 0$, то

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{k_0-1} h f_k^2 = (f, f) = \left(\sum_{n=1}^{k_0-1} f_n \cdot \mu^{(n)}(x_k), \sum_{m=1}^{k_0-1} f_m \cdot \mu^{(m)}(x_k)\right) =$$

$$= \sum_{n,m=1}^{k_0-1} f_n f_m \left(\mu^{(n)}, \mu^{(m)}\right) = \sum_{n,m=1}^{k_0-1} f_n f_m \delta_{n,m} = \sum_{n=1}^{k_0-1} f_n^2.$$

4 Разностные теоремы вложения

Теорема 4.1 *Для всякой сеточной функции $y(x)$, заданной на произвольной неравномерной сетке $\hat{\overline{\omega}}_h \equiv \hat{\overline{\omega}}_h[0, l] = \{x_k;\ k = 0, 1, ..., k_0;\ x_0 = 0,\ x_{k_0} = l\}$, $h_k = x_k - x_{k-1}$, такой что $y_0 = y_{k_0} = 0$, справедливо неравенство*

$$\|y\|_C \leqslant \frac{\sqrt{l}}{2} ||y_{\bar{x}}|], \tag{4.1}$$

где $\|y\|_C = \max\limits_{x \in \hat{\overline{\omega}}_h} |y(x)|, \quad ||y_{\bar{x}}|] = \sqrt{(y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}]}, \quad (y, v] = \sum\limits_{k=1}^{k_0} y_k v_k h_k.$

Доказательство. Справедливо равенство:

$$l y^2(x_k) = (l - x_k) y^2(x_k) + x_k y^2(x_k).$$

Так как $y(0)=0$, то

$$\sum_{p=1}^{k} y_{\bar{x}}(x_p)h_p = (y(x_1)-y(x_0))+(y(x_2)-y(x_1))+...+(y(x_k)-y(x_{k-1})) = y(x_k)-y(0) = y(x_k).$$

Аналогично, поскольку $y(l)=0$, получаем:

$$\sum_{p=k+1}^{k_0} y_{\bar{x}}(x_p)h_p = (y(x_{k+1})-y(x_k))+(y(x_{k+2})-y(x_{k+1}))+...+(y(x_{k_0})-y(x_{k_0-1})) =$$

$$= y(l)-y(x_k) = -y(x_k).$$

Следовательно,

$$y^2(x_k) = \left(\sum_{p=1}^{k} y_{\bar{x}}(x_p)h_p\right)^2 = \left(\sum_{p=k+1}^{k_0} y_{\bar{x}}(x_p)h_p\right)^2.$$

Заметим, что

$$\sum_{p=1}^{k} h_p = h_1+...+h_k = (x_1-x_0)+(x_2-x_1)+...+(x_k-x_{k-1}) = x_k$$

и

$$\sum_{p=k+1}^{k_0} h_p = h_{k+1}+...+h_{k_0} = (x_{k+1}-x_k)+(x_{k+2}-x_{k+1})+...+(x_{k_0}-x_{k_0-1}) = l-x_k.$$

Таким образом, получаем:

$$ly^2(x_k) = (l-x_k)\left(\sum_{p=1}^{k} y_{\bar{x}}(x_p)h_p\right)^2 + x_k\left(\sum_{p=k+1}^{k_0} y_{\bar{x}}(x_p)h_p\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant (l-x_k)\underbrace{\sum_{p=1}^{k} h_p}_{x_k}\sum_{p=1}^{k} y_{\bar{x}}^2(x_p)h_p + x_k\underbrace{\sum_{p=k+1}^{k_0} h_p}_{l-x_k}\sum_{p=k+1}^{k_0} y_{\bar{x}}^2(x_p)h_p = x_k(l-x_k)\sum_{p=1}^{k_0} y_{\bar{x}}^2(x_p)h_p =$$

$$= x_k(l-x_k)||y_{\bar{x}}|]^2.$$

Так как

$$\max_{0\leqslant x\leqslant l} x(l-x) = \frac{l^2}{4},$$

то окончательно получаем:

$$\|y\|_C \leqslant \frac{\sqrt{l}}{2}||y_{\bar{x}}|].$$

Замечание 4.2 *Если y — произвольная функция, не обязательно обращающаяся в 0 на границах отрезка $[0,l]$, то для нее можно получить оценку:*

$$\|y\|_C^2 \leqslant 2\left(y_0^2 + y_{k_0}^2 + \frac{l}{4}||y_{\bar{x}}|]^2\right).$$

Теорема 4.3 *Для всякой сеточной функции $y(x)$, заданной на произвольной неравномерной сетке $\overline{\hat{\omega}_h} \equiv \overline{\hat{\omega}_h}[0,l] = \{x_k;\ k = 0,1,...,k_0;\ x_0 = 0,\ x_{k_0} = l\}$, $h_k = x_k - x_{k-1}$, такой что $y_0 = y_{k_0} = 0$, справедливо неравенство*

$$\|y\|^2 \leqslant \frac{l^2}{4}||y_{\bar{x}}|]^2. \tag{4.2}$$

Доказательство. Пользуясь неравенством (4.1), получаем:

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{k_0-1} y_k^2 h_k \leqslant \max_k |y_k|^2 \sum_{k=1}^{k_0-1} h_k \leqslant \frac{l}{4}||y_{\bar{x}}|]^2 \cdot l.$$

Теорема 4.4 *Для всякой сеточной функции $y(x)$, заданной на равномерной сетке $\overline{\omega_h} = \{x_k = kh;\ k = 0,1,...,k_0;\ \ k_0 h = l\}$, такой что $y_0 = y_{k_0} = 0$, справедливы оценки:*

$$\frac{h^2}{4}||y_{\bar{x}}|]^2 \leqslant \|y\|^2 \leqslant \frac{l^2}{8}||y_{\bar{x}}|]^2. \tag{4.3}$$

Доказательство. Разложим функцию y по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля (3.2) на отрезке $[0,l]$:

$$y(x) = \sum_{n=1}^{k_0-1} C_n \mu^{(n)}(x), \quad C_n = (y, \mu^{(n)}),$$

причем

$$\|y\|^2 = \sum_{n=1}^{k_0-1} C_n^2.$$

Пользуясь первой формулой Грина (1.4) и граничными условиями для функции y, получаем:

$$-(\Lambda y, y) = (y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}] = ||y_{\bar{x}}|]^2, \quad \text{где } \Lambda y = y_{\bar{x}x}.$$

В свою очередь

$$\Lambda y = \sum_{n=1}^{k_0-1} C_n \underbrace{\Lambda \mu^{(n)}(x)}_{-\lambda_n \mu^{(n)}(x)} = -\sum_{n=1}^{k_0-1} C_n \lambda_n \mu^{(n)}(x).$$

Так как $\left(\mu^{(n)}, \mu^{(m)}\right) = \delta_{n,m}$, то
$$||y_{\bar{x}}]|^2 = \sum_{n=1}^{k_0-1} C_n^2 \lambda_n,$$
откуда получаем:
$$\lambda_1 \underbrace{\sum_{n=1}^{k_0-1} C_n^2}_{\|y\|^2} \leqslant ||y_{\bar{x}}]|^2 \leqslant \lambda_{k_0-1} \underbrace{\sum_{n=1}^{k_0-1} C_n^2}_{\|y\|^2} \;\Rightarrow\; \lambda_1 \|y\|^2 \leqslant ||y_{\bar{x}}]|^2 \leqslant \lambda_{k_0-1} \|y\|^2.$$
Так как
$$\lambda_1 = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2l} \;\Rightarrow\; \lambda_1 \geqslant \frac{8}{l^2}$$
и
$$\lambda_{k_0-1} = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2l} \leqslant \frac{4}{h^2},$$
то окончательно получаем:
$$\frac{8}{l^2} \|y\|^2 \leqslant ||y_{\bar{x}}]|^2 \leqslant \frac{4}{h^2} \|y\|^2,$$
или, что то же самое:
$$\frac{h^2}{4} ||y_{\bar{x}}]|^2 \leqslant \|y\|^2 \leqslant \frac{l^2}{8} ||y_{\bar{x}}]|^2.$$